Διάλεξη 20η Διαφορική Γεωμετρία

19/12/2019

Τρίτη θεμελιώδης μορφή

Ορισμός: Καλούμε τρίτη θεμελ. μορφή της επιφάνειας S στο p την τετραγωνική μορφή $III_p : T_pS \to \mathbb{R}$.

$III_p(w) = \langle L_p w, L_p w \rangle$

$(w_1, w_2) \to \langle L_p w_1, L_p w_2 \rangle$

$$\boxed{\langle L_p w, L_p w \rangle = \langle L_p(L_p w), w \rangle}$$

$III_p(w) = \|L_p w\|^2 = \langle L_p w, L_p w \rangle$

$III_p(w) = \langle L_p^2 w, w \rangle$.

$L_p^2 = L_p \cdot L_p$.

Θεώρημα: $\forall p \in S$ ισχύει $III_p - 2H(p) II_p + K(p) I_p = 0$

Απόδ

Η $L_p : T_pS \to T_pS$ έχει χαρακτηριστικό πολ/μο

$x(t) = (t - k_1(p))(t - k_2(p)) = t^2 - (k_1(p) + k_2(p))t + k_1(p) k_2(p)$

$= t^2 - H(p) t + K$.

Από θεώρημα C-H:

$L_p^2 - 2H(p) L_p + K(p) Id = 0$

$L_p^2 w - 2H(p) L_p w + K(p) w = 0, \quad \forall w \in T_pS$

$\Rightarrow \langle L_p^2 w, w \rangle - 2H(p) \langle L_p w, w \rangle + K(p) \langle w, w \rangle = 0$

$\Leftrightarrow III_p(w) - 2H(p) II_p(w) + K(p) I_p(w) = 0$

Ελαχιστοποίηση του εμβαδού $\Rightarrow H = 0$

Ορισμός: Μια επιφάνεια καλείται ελάχιστη

$\iff H = 0$

π.χ.

Επίπεδο, ελικοειδής, αλυσοειδής επιφάνεια

$$\left.\begin{array}{l} III_p + K(p) I_p = 0 \iff III_p = -K(p) I_p \\ II_p \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow K \leq 0$$

$$\boxed{H = 0 \Rightarrow K \leq 0}$$

Όλα τα σημεία κάθε ελαχιστικής επιφάνειας είναι υπερβολικά ή επίπεδα.

$c: I \to S$: καμπύλη με φυσική παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$.

$$k_n(w) = \langle N(p), \ddot{c}(0) \rangle$$

$$k_n(\dot{c}(s)) = \langle L_{c(s)} \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle$$

$$= -\langle dN(\dot{c}(s)), \dot{c}(s) \rangle$$

$$= -\langle (N \circ c)^{\cdot}(s), \dot{c}(s) \rangle = -(\langle \cancel{N \circ c(s)}^{\,0}, \dot{c}(s) \rangle)^{\cdot} + \langle N \circ c(s), \ddot{c}(s) \rangle$$

$$k_n(\dot{c}(s)) = \langle N(c(s)), \ddot{c}(s) \rangle$$

Ορισμός: Μια επιφάνεια θα λέγεται ευθειογενής αν-ν από κάθε σημείο της διέρχεται ευθεία (ή ευθ. τμήμα) που διέρχεται στην επιφάνεια.

π.χ : σαμάρι, κώνος, μονόχωνο υπερβολοειδές, ορθό κυκλικό κύλινδρος

Πρόταση: Αν $c: I \to S$ είναι ευθεία τότε η c είναι ασυμπτωτική καμπύλη της S. Επιπλέον ισχύει $K \leq 0$ στα σημεία της ευθείας c.

Πόρισμα: Κάθε ευθειογενής επιφάνεια έχει $K \leq 0$ παντού.

Κυλινδρικές επιφάνειες

Ορισμός: Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ επίπεδη καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s και e είναι μοναδιαίο κάθετο στο επίπεδο της (Π).

- Η παραμετρική επιφάνεια $X: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $X(s,u) = c(s) + ue$ καλείται κυλινδρ. επιφάνεια.

$$X_s(s,u) = \dot{c}(s) = \vec{t}(s)$$

$$X_u(s,u) = e$$

$$X_s \times X_u(s,u) = \vec{t}(s) \times e \neq 0 \quad : \text{κανονική}$$

$E = \|x_s\|^2 = 1$

$F = \langle x_s, x_u \rangle = 0$

$G = \|x_u\|^2 = 1.$

$$\Rightarrow \Gamma_{ij}^{k} = 0 \xRightarrow[\text{Θεωρ.}]{\text{Εξοχο}} K \equiv 0$$

$$N = \frac{x_s \times x_v}{\|x_s \times x_v\|} \Rightarrow N(s,u) = \vec{t}(s) \times e$$

$$e = \langle x_{ss}, N \rangle = \langle \dot{t}(s), \vec{t}(s) \times e \rangle = k(s) \langle \vec{n}(s), \vec{t} \times e \rangle.$$

$f = 0$

$g = 0$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0.$$

Κωνικές επιφάνειες

Παρατήρηση: Κάθε ευθειογενής επιφάνεια γενικά δέχεται παραμετρικοποίηση της μορφής:

$$X(u,v) = c(u) + v\,w(u)$$
$$w(u) \neq 0$$

Είναι ευθειογενείς επιφάνειες $X(u,v) = c(u) + v\,w(u)$ όπου $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ και

$$w(u) = a(u) + p_0 \quad , \quad a \neq 0, \; p_0 \in \mathbb{R}^3.$$

$X(u,v) = c(u) + a u c(u) + v P_0$

$\iff X(u,v) = (1 + au)\, c(u) + v P_0$

$X_u = (1+au)\, c'(u)$

$X_v = a c(u) + P_0$

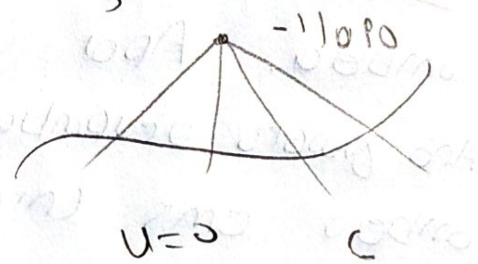
c: κανονική

$X_u = 0 \iff u = -\frac{1}{a}$

$X(u, -\frac{1}{a}) = -\frac{1}{a} P_0$

κορυφή κωνικής επιφάνειας.

οι γενέτειρες τέμνονται.



$f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0$

$g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0$

Επιφάνειες εφαπτομένων.

Ορισμός: Καλείται επιφάνεια εφαπτομένων μιας κανονικής καμπύλης $c: I \to \mathbb{R}^3$ την επιφάνεια που δημιουργούν όλες οι εφαπτ. ευθείες της

$$X(t,u) = c(t) + u c'(t)$$

$$\left.\begin{aligned} X_t &= c'(t) + u c''(t) \\ X_u &= c'(t) \end{aligned}\right\}$$

$X_t \times X_u = -u\, c'(t) \times c''(t)$

$$\kappa(t) = \frac{\| c'(t) \times c''(t) \|}{\| c'(t) \|^3} > 0$$

$$f = \langle X_{su}, N \rangle = 0 \quad \Big\} \quad k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \equiv 0$$
$$g = \langle X_{uu}, N \rangle = 0$$

$N(t,v) =$ ανεξ του u.

Εστω S κανονική επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $k \equiv 0$ με $k_1 k_2 = 0$ → ισόπεδα

Υπόθεση Υποθέτω ότι η S δεν έχει ισόπεδο σημεία. Άρα υποθέτω ότι $k_1 > k_2 = 0$.
Από γνωστό θεώρημα υπάρχει γύρω από κάθε σημείο της επιφάνειας S, σύστημα συντεταγμένων $X(u,v)$ ώστε $LX_u = k_1 X_u$, $\boxed{LX_v = k_2 \cancel{X_v} = 0}$

$\Updownarrow$

$N_v = 0 \Rightarrow$

$N =$ ανεξ του u.

$f = \langle LX_u, X_v \rangle = \langle LX_v, \cancel{X_u} \rangle^{0} = 0$

$k_1 \langle X_u, X_v \rangle = 0 \Rightarrow F = 0$

$\langle LX_u, X_v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle N_u, X_v \rangle = 0$

$$\left.\begin{array}{l} X_u \perp N_u \\ X_v \perp N_u \end{array}\right\} \Rightarrow X_u \parallel N_u \times N. \quad (*)$$

Επιστρέφω $N =$ ανεξ. του u. : (1)

$\Downarrow$

$N_u =$ — " — : (2)

Από ① και ② η ⊛ γράφεται:

$X_v \parallel N_u \times N \Rightarrow$ το εφαπ. διαν.

των παρ. καμπυλών $X(u = \sigma\tau\alpha\theta, v)$

είναι // σταθ. διαν.

SOS: Αν $c'(t) \parallel \vec{\omega} \neq \vec{0}$

$\Updownarrow$

$c'(t) = f(t)\,\vec{\omega}$

$\vec{c}''(t) = f'(t)\,\vec{\omega}$

$$k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = 0$$

Ορισμός: (αναπτυκτές επιφάνειες)

Μια επιφάνεια καλείται αναπτυκτή αν-ν

i) ευθειογενείς

ii) Το μοναδιαίο κάθετο παραμένει σταθ. κατά μήκος κάθε γενέτειρας της.

Παραδείγματα: Τα τρία παραδ. που γράψαμε πριν.

Θεώρημα: Κάθε επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K = 0$ χωρίς ισόπεδα σημεία είναι τοπικά αναπτυκτική επιφάνεια.

Πρόταση: Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K \equiv 0$.

Απόδ.

Έστω $c(s)$ γεννήτορα της S: $N \circ c(s) =$ σταθερό $\Rightarrow$ $(N \circ c)^{\cdot}(s) = 0 \Rightarrow dN_{c(s)}(\dot c(s)) = 0 \Rightarrow L_{c(s)}(\dot c(s)) = 0$

$$III_{c(s)}(\dot c(s)) = \| L_{c(s)}(\dot c(s)) \|^2 = 0$$

$$III_{c(s)}(\dot c(s)) - 2H(c(s))\, II(\dot c(s)) + K(c(s))\, I(\dot c(s)) = 0$$

$$K(c(s)) = 0$$

Ερώτημα: Είναι οι κυλινδρικές, κωνικές και οι επιφάνειες εφαπτόμενων οι μόνες αναπτυκτές επιφ;

Πρόταση: Κάθε ευθειογενής επιφάνεια με $K \equiv 0$ είναι αναπτυκτική.

Απόδ.

Έστω S ευθειογενή είναι παραμετρική

$X(u,v) = c(u) + v\,\omega(u)$, $\|\omega(u)\| = 1$

Επιλέγω την c έτσι ώστε να ισχύει

$\langle c'(u), \omega(u) \rangle = 0$

$$\left.\begin{aligned} X_u &= c'(u) + v\,\omega'(u) \\ X_v &= \omega(u) \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_{uv} = \omega'(u)$$

9

$$N(u,v) = \frac{c'(u) \times w(u) + v\, w'(u) \times w(u)}{\| \quad \|}$$

$g = \langle X_{w}, N \rangle \Rightarrow g = 0$

$f = \langle X_{uv}, N \rangle \Rightarrow \langle w'(u), N \rangle$

$$f = \frac{\langle c'(u) \times w(u), w(u) \rangle}{\| \dots \|}$$

$$f = \frac{[c'(u), w(u), w'(u)]}{\| \dots \|}$$

$$K = -\frac{[c'(u), w(u), w'(u)]^2}{\| \dots \|^3}$$

$K = 0 \Leftrightarrow [c', w, w'] = 0 \Leftrightarrow \langle c' \times w, w' \rangle = 0 \Leftrightarrow w' \perp c' \times w$

$\langle w, w \rangle = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} w' \perp w \\ w' \perp c' \times w \end{array}\right\} \Rightarrow w' \parallel (c' \times w) \times w$

$\Rightarrow \exists$ συνάρτηση $b(u)$: $w'(u) = b(u) \{ \langle c', w \rangle w - \langle w, w \rangle c' \}$

$w'(u) = -b(u)\, c'(u)$

$K = 0 \Leftrightarrow \boxed{w'(u) = a(u)\, c'(u)}$

• περίπτωση $a(u) = 0$

$\Rightarrow w(u) = \text{σταθ} = \vec{e}$

$\langle c'(u), \vec{e} \rangle = 0$

$(\langle c(u), e \rangle)' = 0$

$\langle c(u), e \rangle = \text{σταθ}$, είναι κυλινδρ. επιφάνεια

• **Περίπτωση:** Έστω $\alpha(u) = \alpha =$ σταθ. $\neq 0$

$\omega'(u) = \alpha c'(u) \xrightarrow{\text{ολοκλ.}} \omega(u) = \alpha c(u) + p_0$

$\Rightarrow$ κωνική επιφάνεια.

• **Περίπτωση:** $\alpha(u)\alpha'(u) \neq 0, \forall u \in I_0$

$$X_u(u,v) = c'(u) + v\omega'(u) = c'(u) + v\,\alpha(u)\,c'(u) = (1 + v\,\alpha(u))\,c'(u)$$

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΙ $v = -\frac{1}{\alpha(u)}$

$$X\left(u, -\frac{1}{\alpha(u)}\right) = c(u) - \frac{1}{\alpha(u)}\omega(u) = \tilde{c}(u)$$

$$\tilde{c}'(u) = c'(u) + \frac{\alpha'(u)}{\alpha^2(u)}\omega(u) - \frac{1}{\alpha(u)}\omega(u)$$

$$= c'(u) + \frac{\alpha'(u)}{\alpha^2(u)}\omega(u) - \frac{1}{\alpha(u)}\alpha(u)\,c'(u)$$

Θεώρημα: Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια είναι τοπικά κυλινδρική, κωνική ή επιφάνεια εφαπτόμενων

Θεώρημα: Κάθε επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K=0$ χωρίς ισόπεδα σημεία είναι τοπικά κυλινδρική, κωνική ή επιφάνεια εφαπτόμενων.

Θεώρημα: Κάθε επιφάνεια με καμπ. Gauss $K=0$ είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο.